2013 年北大"百年数学"科学体验营试题解析

徐小平
(福建省厦门一中,361003)

针对学科竞赛保送政策发生重大变化,即只有进入国家集训队的同学才具有保送资格,又恰逢北京大学数学学科创建一百周年纪念,北京大学数学科学学院举办第一届"百年数学"科学体验营,体验营面向获得参加全国决赛即冬令营资格的优秀学生,吸引了一大批数学才子报名参加,在 10 月 30 日晚 19:00—22:00,全体营员进行了笔试的角逐,试题共 5 道,每题 20 分,满分为 100 分,试题背景深刻,难度颇大. 本文给出试题的解析供师生参考.

题 1 在单位正方形 $ABCD$ 内(包括边界)自由选取若干个节点(数目任意),并与四点 A,B,C,D 用直线段连成一个连通网络(连通图),求这样的网络总长度的最小值,并证明你的结论.

解 (1) 当网络没有增加节点(即只选取正方形的顶点或边上的点作节点)时,网络长度最小值相当于正方形的三边长即为 3;

(2) 当网络增加一个正方形内部的节点 E 时,如图 1,易知,此时网络总长度最小为 $EA+EB+EC+ED>AC+BD$,即当 E 为正方形中心 O 时,网络总长度最小,最小值为 $2\sqrt{2}$;

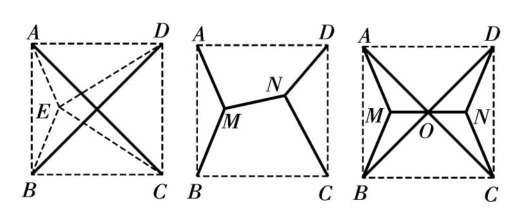

图 1 图 2 图 3

(3) 当网络增加正方形内部的两个节点 M,N 时,我们用局部调整法来确定 M,N 的位置,使得 $(AM+BM)+MN+(CN+DN)$ 最小,当保持 $AM+BM$ 不变时,M 在以 AB 为焦点的椭圆上运动,保持 $CN+DN$ 不变时,N 在以 CD 为焦点的椭圆上运动,调整 M,N 知,当 $AM=BM,CN=DN$ 时,MN 最小(如图 2,3),即只有当 M,N 在 $AB(CD)$ 的中垂线上时,总线长才会最短,此时,正方形中心在直线 MN 上,因此 M,N 分别是 $\triangle ABO$ 和 $\triangle CDO$ 的费马点,易求得此时网络总长度最小值为 $1+\sqrt{3}$;

(4) 当网络中增加正方形内三个节点时,易知必存在一个节点是多余的即网络总长度比情形(3)大,同样的,当网络中增加三个以上节点时,网络总长度也比情形(3)大;综上可知,网络总长度的最小值为 $1+\sqrt{3}$.

评注 本题背景深刻,是组合分析中的重要课题—斯坦纳最小生成树问题,应用调整法及三角形费马点进行求解,95 年全国高考命题组对应用题选编时就曾考虑过该问题.

题 2 已知 $x,y,z>0$,$x+y+z=3$,求证:
$$\frac{x}{x^3+y^2+z}+\frac{y}{y^3+z^2+x}+\frac{z}{z^3+x^2+y}\leqslant 1.$$

证明 由 Cauchy 不等式,$(x^3+y^2+z)\left(\frac{1}{x}+1+z\right)\geqslant(x+y+z)^2=9$,

于是 $\frac{x}{x^3+y^2+z}\leqslant\frac{\left(\frac{1}{x}+1+z\right)x}{9}=\frac{1+x+zx}{9}$,

同理 $\frac{y}{y^3+z^2+x}\leqslant\frac{1+y+xy}{9}$,

$\frac{z}{z^3+x^2+y}\leqslant\frac{1+z+yz}{9}$,

所以
$$\frac{x}{x^3+y^2+z}+\frac{y}{y^3+z^2+x}+\frac{z}{z^3+x^2+y}$$
$$\leqslant\frac{1+x+zx}{9}+\frac{1+y+xy}{9}+\frac{1+z+yz}{9}$$
$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}(xy+yz+zx)$$
$$\leqslant\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\times\frac{(x+y+z)^2}{3}=1.$$

评注 运用 Cauchy 不等式进行局部放缩使问题得到解决. 当然,本题也可用均值不等式证明.

题 3 求证:存在无穷多对正整数 (a,b) 满足 $ab\mid a^8+b^4+1$.

证明 (1) 显然,$(1,1)$ 是满足 $ab\mid a^8+b^4+1$ 的一组平凡的解,记 $(a_1,b_1)=(1,1)$;

(2) 若 (a_k,b_k) $(k\in\mathbf{N}^*)$ 满足 $a_kb_k\mid a_k^8+b_k^4+1$,

易知 a_k, b_k 互质,又由 $a_kb_k \mid a_k^8+b_k^4+1$ 得 $a_k \mid b_k^4+1$ 且 $b_k \mid a_k^8+1$,不妨设 $a_kt=b_k^4+1$,因为 $b_k \mid a_k^8+1$ 即 $b_k \mid a_k^8+(ta_k-b_k^4)^8$,于是 $b_k \mid a_k^8(t^8+1)$,于是 $b_k \mid t^8+1$(这是因为 a_k, b_k 互质),显然 $t \mid b_k^4+1$ 且 t, b_k 互质,因此,$tb_k \mid t^8+b_k^4+1$,即(t, b_k) 是满足条件的一组解;同理,设$b_k\ s=a_k^8+1$,则(a_k, s) 是满足条件的一组解,若 $a_k \geqslant b_k$,则 $s>b_k$,记$(a_{k+1}, b_{k+1})=(a_k, s)$,若 $a_k<b_k$,则 $t>a_k$,记$(a_{k+1}, b_{k+1})=(t, b_k)$,则$(a_{k+1}, b_{k+1})$ 是满足 $a_{k+1}+b_{k+1}>a_k+b_k$ 的一组解,这样的递推过程可以一直做下去,我们便得到无穷多对正整数(a, b) 满足 $ab \mid a^8+b^4+1$.

评注　本题是 2003 年俄罗斯圣彼得堡 8 年级试题,是数论中的整除问题,我们用递推构造出无穷多对正整数解.

题 4　一天 $n(\geqslant 2)$ 个人组成了一个新党,每个人向政府交一元的注册费,接下来每一天都发生如下事情:每一个前一天组建的党都分裂成两个团体,其中含至少两人的团体组建成一个新党,每个新党的成员向政府交一元的注册费,只有一名成员的团体不再组建新党,上述过程直到不能继续进行下去为止,求政府一共可能收到的注册费的最大值和最小值.

解　记政府一共可能收到的注册费的最大值是 $M(n)$,最小值是 $m(n)$,某种组党方式政府收到的注册费为 $d(n)$,知 $M(n) \geqslant d(n) \geqslant m(n)$.

(1) 先证明 $M(n)=\frac{n(n+1)}{2}-1$,我们用归纳法证明. 当 $n=2$ 时显然成立;

假设 $n \leqslant k-1$ $(k \geqslant 3, k \in \mathbf{N})$ 时成立,则当 $n=k$ 时,第二天分为有 p 和 $k-p$ 人的两党,则 $d(k)=k+d(p)+d(k-p) \leqslant k+M(p)+M(k-p)$,

由归纳假设知 $M(p)=\frac{p(p+1)}{2}-1$,$M(k-p)=\frac{(k-p)(k-p+1)}{2}-1$,

于是 $d(k) \leqslant k+\frac{p(p+1)}{2}-1+\frac{(k-p)(k-p+1)}{2}-1=p^2-kp+\frac{k^2+3k}{2}-2$,

因为 $1 \leqslant p \leqslant k-1$ 且 $1+(k-1)=k$,所以$h(p)=p^2-kp+\frac{k^2+3k}{2}-2 \leqslant h(1)=h(k-1)=\frac{k(k+1)}{2}-1$.

而当 $p=1$ 且 $d(k-1)=M(k-1)$ 时,$d(k)=\frac{k(k+1)}{2}-1$,故 $M(k)=\frac{k(k+1)}{2}-1$.

由数学归纳法知 $M(n)=\frac{n(n+1)}{2}-1$;

(2) 设$f(n)=n[\log_2 n]+2(n-2^{[\log_2 n]})$(其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数),下面,我们将证明 $m(n)=f(n)=n[\log_2 n]+2(n-2^{[\log_2 n]})$. 首先,我们证明如下两个引理:

引理 1　记$\triangle f(n)=f(n+1)-f(n)$,则$\triangle f(n)$ 是不减的.

证明　记 $[\log_2 n]=k$,则 $[\log_2(n+1)]=k'$,若 $n+1$ 不是 2 的幂则 $k'=k$,若 $n+1$ 是 2 的幂则 $k'=k+1$,

所以$\triangle f(n)=f(n+1)-f(n)=2+n(k'-k)+k'+2^{k+1}-2^{k'+1}$.

当 $n+1$ 不是 2 的幂时,$\triangle f(n)=2+k=2+[\log_2 n]$,

当 $n+1$ 是 2 的幂时,$\triangle f(n)=2+n+k+1-2^{k+1}=2+k=2+[\log_2 n]$,

即对任意正整数 n 均有$\triangle f(n)=2+[\log_2 n]$,故$\triangle f(n)$ 是不减的;

引理 2　若 $2 \mid n$,则$f(n)+f(n-k) \geqslant 2f(\frac{n}{2})$;

若 $2 \nmid n$ 则 $f(n)+f(n-k) \geqslant f(\frac{n+1}{2})+f(\frac{n-1}{2})$.

证明　若正整数 $a>b$,保持和不变,即令 $a+b=a'+b'$,$a'<a$,$b'>b$,

则由于$f(a+1)+f(b-1) \geqslant f(a)+f(b)$,因此$f(a)+f(b) \geqslant f(a')+f(b')$,

即让 a 变小,b 变大,$f(a)+f(b)$ 不增,因此若 $2 \mid n$,则$f(n)+f(n-k) \geqslant 2f(\frac{n}{2})$,

若 $2 \nmid n$ 则 $f(n)+f(n-k) \geqslant f(\frac{n+1}{2})+f(\frac{n-1}{2})$.

下面,我们用数学归纳法证明 $m(n)=f(n)=n[\log_2 n]+2(n-2^{[\log_2 n]})$.

当 $n=2$ 时,$m(2)=2=f(2)$,命题成立.

假设 $n \leqslant k-1$ $(k \geqslant 3, k \in \mathbf{N})$ 时成立,则当 $n=k$ 时,第二天分为有 p 和 $k-p$ 人的两党,则 $d(k)=k+d(p)+d(k-p) \geqslant k+m(p)+m(k-p)=k+f(p)+f(k-p)$,记 $\lambda=[\log_2 k]$.

（i）若 $2\mid k$，则由 $\left[\log_2 \frac{k}{2}\right] = [\log_2 k - 1] = [\log_2 k] - 1 = \lambda - 1$，得 $f\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{k}{2}(\lambda - 1) + 2\left(\frac{k}{2} - 2^{\lambda-1}\right) = \frac{k}{2}\lambda + \frac{k}{2} - 2^{\lambda}$，于是

$d(k) \geqslant k + f(p) + f(k-p) \geqslant k + 2f\left(\frac{k}{2}\right) = k\lambda + 2k - 2^{\lambda+1} = k[\log_2 k] + 2(k - 2^{[\log_2 k]}) = f(k)$，

且当 $p = \frac{k}{2}$ 时，有 $d(k) = f(k)$，故 $m(k) = f(k)$；

（ii）若 $2 \nmid k$，则 k 不是 2 的幂，因此 $[\log_2(k-1)] = \lambda$，故 $\left[\log_2 \frac{k-1}{2}\right] = \lambda - 1$，由引理 1 的证明知 $f\left(\frac{k+1}{2}\right) - f\left(\frac{k-1}{2}\right) = 2 + \lambda - 1 = \lambda + 1$，

又因为 $f\left(\frac{k-1}{2}\right) = \frac{k-1}{2}(\lambda - 1) + 2\left(\frac{k-1}{2} - 2^{\lambda-1}\right) = \frac{k-1}{2}\lambda + \frac{k-1}{2} - 2^{\lambda}$，

所以 $d(k) \geqslant k + f(p) + f(k-p) \geqslant k + f\left(\frac{k+1}{2}\right) + f\left(\frac{k-1}{2}\right) = k + 2f\left(\frac{k-1}{2}\right) + \lambda + 1 = k + (k-1)\lambda + k - 1 - 2^{\lambda+1} + \lambda + 1 = k\lambda + 2k - 2^{\lambda+1} = k[\log_2 k] + 2(k - 2^{[\log_2 k]}) = f(k)$，

且当 $p = \frac{k \pm 1}{2}$ 时，有 $d(k) = f(k)$，故 $m(k) = f(k)$，

由数学归纳法可知 $m(n) = f(n) = n[\log_2 n] + 2(n - 2^{[\log_2 n]})$.

综上，政府一共可能收到的注册费的最大值为 $M(n) = \frac{n(n+1)}{2} - 1$；最小值为 $m(n) = n[\log_2 n] + 2(n - 2^{[\log_2 n]})$.

评注　本题也是一道组合题，运用数学归纳法分析并证明结论，难度较大.

题 5　求方程 $x^5 + 10x^3 + 20x - 4 = 0$ 的所有根.

解法 1　设 $x = z - \frac{2}{z}$，则方程 $x^5 + 10x^3 + 20x - 4 = 0$ 可化为 $z^5 - \frac{32}{z^5} - 4 = 0$，于是 $z^5 = -4$ 或 $z^5 = 8$，故 $z = \sqrt[5]{8}\,e^{\frac{2k\pi}{5}i}$ 或 $z = -\sqrt[5]{4}\,e^{-\frac{2k\pi}{5}i}$（其中 $k = 0,1,2,3,4$），

于是相应的 $x = \sqrt[5]{8}\,e^{\frac{2k\pi}{5}i} - \sqrt[5]{4}\,e^{-\frac{2k\pi}{5}i} = 4$，（其中 $k = 0,1,2,3,4$）.

解法 2　注意到满足 $f(2\sqrt{2}\sinh t) = 8\sqrt{2}\cosh 5t$ 的多项式是 $f(x) = x^5 + 10x^3 + 20x$，即 $8\sqrt{2} \times \frac{e^{5t} - e^{-5t}}{2} = 4$，所以 $e^{5t} = \sqrt{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

于是 $e^t = \sqrt[10]{2}\,e^{\frac{2k\pi}{5}i}$ 或 $e^t = -\frac{1}{\sqrt[10]{2}}e^{\frac{2k\pi}{5}i}$（其中 $k = 0,1,2,3,4$）.

故 $x = \sqrt{2}(e^t - e^{-t}) = \sqrt[5]{8}\,e^{\frac{2k\pi}{5}i} - \sqrt[5]{4}\,e^{-\frac{2k\pi}{5}i}$（其中 $k = 0,1,2,3,4$）.

评注　本题的背景是切比雪夫多项式，若不熟悉切比雪夫多项式，要做出此题，难度异常之大.

（收稿日期：2013－11－07）

对一道 2013 广东预赛试题的探究

王怀明

（安徽省枞阳县会宫中学，246740）

2013 年全国高中数学联赛广东省预赛于 9 月 7 日举行，其中解答题第二题是一道解析几何与向量的综合题，构思精巧，看似简单，实则不易.

1　试题及解答

题 1　（2013 广东省预赛试题）已知两点 $C\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$，$D\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0\right)$，设 A, B, M 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上三点，满足 $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{4}{5}\overrightarrow{OB}$，点 N 为线段 AB 的中点，求 $|NC| + |ND|$ 的值.

解　设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，则