

中国科学技术大学 2021 年强基计划考试

数学试题

一. 填空题

1. 函数 $|x^2 - 4x + 3|$ 的单调递增区间是_____
2. 把函数 $y = \sin(3x)$ 的图像向右平移 2 个单位, 得到函数 $y = \cos(3x + b)$ 的图像, 其中 $0 \leq b < 2\pi$, 则 $b =$ _____
3. 不等式组 $1 \leq x^2 + y^2 \leq x + y$ 所表示的平面区域面积是_____
4. 设复数 $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$, 则求 $\sum_{k=1}^{2020} kz^k$ 的虚部_____
5. 已知向量满足条件: $|2\alpha - \beta| = 3, |\alpha - 2\beta| = 4, |\alpha + \beta| = 5$, 则求两向量相减所得模长为_____
6. 视地球为半径 R 的球, 分别位东经 120° 北纬 60° 和西经 120° 南纬 60° 的两地之间的球面距离为_____
7. 已知圆柱体的表面积为 1, 则其体积的最大值为_____
8. 设三个动点, A, B, C 按逆时针排列, A, B 分别在 x, y 轴上, $AB=5, AC=4, BC=3$, 则 C 的轨迹方程表达式_____
9. 双曲线 $(x+1)(y-2)=3$ 的距离 $(0, 0)$ 最远的准线方程为_____
10. 随机选取 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的三元子集 $\{a, b, c\}$, 则 abc 的数学期望为_____

二. 解答题

11. 设四棱锥 $P-ABCD$ 的所有棱长都是 3, E, F, G 分别是 AD, CD, BP 的中点, 四棱锥被平面 EFG 分为两部分, 求其中棱锥部分的体积.
12. 从 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 中选取 x, y, z 作为随机变量, 且排序 $x < y < z$, 求证 $E(z) = 3E(x)$

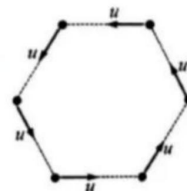
13. 给定 a, b 均为正实数, 从双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的第一三象限渐近线上动点 A 做双曲线切线, 与另一条渐近线交于 B 点, 求证三角形 OAB 的面积为定值.

14. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个完全不同的实数, $n=2021$ 求证:
$$\sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{a_i + a_j}{a_i - a_j} = 1$$
 (i, j 互异)

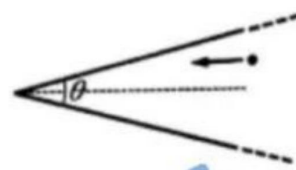
中国科学技术大学 2021 年强基计划考试

物理试题

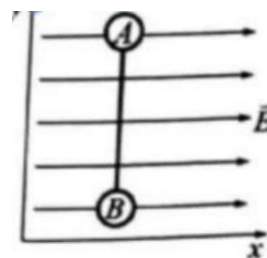
1. 初始状态下, 6 只蚂蚁分别位于边长为 L 的正六边形的六个顶点处, 在某一时刻, 它们开始以不变的速率 u 相互追逐, 速度方向始终指向前面的蚂蚁, 最后在正六边形的中心相遇。则六只蚂蚁走过的总路程长度为_____



2. 两块非常长的光滑挡板围成一个夹角为 10° 的三角形区域, 一小球沿着角平分线方向的初速度入射, 设球与挡板间的碰撞是弹性的, 则球与挡板一共会发生_____次碰撞



3. 初始时刻, 由轻质刚性杆连接的质量相等的 A、B 两个小球静止于光滑的水平面上, 杆平行于 y 轴, 整个体系处于平行于 x 轴的匀强电场中, 如果小球 A、B 带电量均为 q , 稳定状态下体系的总能量和总动量分别为 E_1, P_1 ; 若小球 A 带电量为 $2q$, 小球 B 不带电, 则稳定状态下体系的总能量和总动量分别为 E_2, P_2 , 请分析两种状态下体系的动量与能量关系, 并证明。



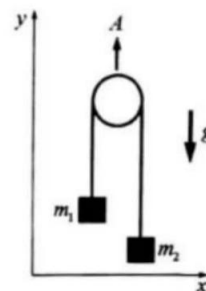
4. 导体球外有一个带正电的点电荷, 下列说法正确的是 ()

- A. 如果导体球带正电, 则二者之间的作用力必为排斥力;
- B. 如果导体球接地, 则二者之间的作用力必为吸引力
- C. 如果导体球是电中性的, 则二者间的作用力必为吸引力
- D. 如果导体球接地, 则其表面任何位置都不会出现正的净电荷

5. 质量为 m 的物体通过劲度系数为 k 的轻质弹簧悬挂在天花板上, 其振动周期为 T , 若将弹簧平均分为 4 段, 用其中的一段悬挂质量为 $2m$ 的物体, 则物体的振动周期为_____

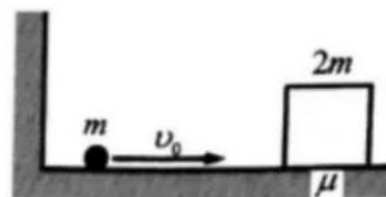
6. 两个电容器的标称值分别为 $300\mu\text{F}, 600\text{V}; 200\mu\text{F}, 1200\text{V}$, 则将两个电容器串联时的耐压值为_____

7. 两质量分别为 m_1, m_2 的小物块通过光滑轻绳与轻质滑轮连接, 滑轮以恒定的速度 A 向上运动, 两个物体只在竖直方向上运动, 重力加速度大小为 g , 则 m_1, m_2 的加速度为_____, _____



8.如图所示,质量为 m 、初速度为 v_0 的小球与质量为 $2m$ 的木块之间来回运动,木块初始时静止。设碰撞瞬时完成且是完全弹性的并假设木块与墙之间的距离足够远,以至于每次与小球碰撞之前木块已经静止。已知木块与地面的摩擦系数为 μ ,而小球与地面之间没有摩擦力,重力加速度为 g 。

- (1)小球与木块发生第 n 次碰撞之后的速度多大?
- (2)木块最终能运动多远距离?
- (3)木块运动的总时间(即其速度不为 0 的时间)等于多少?



9.如题所根质量分布均匀的绳子搁在两个倾角均为 α 的平台上《倾角 α 可调控),绳子与平台的摩擦系数为 1,整个系统左右对称,重力加速度为 g , 设 f 是绳子上与平台不接触的部分占绳子总质量的比例。当 α 取何值时, f 取到最大值, 则最大值为多少?



10.带电粒子在液氢气泡室中运动时将使其路径上的一些分子发生电离,电离处所形成的小气泡使粒子的轨迹清楚可见,而在此区域内的磁场则使路径发生弯曲。下面的气泡室照片显示的是 P 点处的一个几乎静止的电子吸收高能 γ 射线后沿着曲线 c 运动,同时生正、负电子对(正电子 e^+ 是电子 e^- 的反粒子,二者质量相同、带电量相反),该反应可表示为 $\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+$ 已知均匀磁场与纸面垂直。



- (1)曲线 a 、 b 中的哪一条表示正电的轨迹?
- (2)磁场的方向指向纸面内还是纸面外, 简述理由
- (3)试定型解释曲线 a 、 b 是旋线而非圆周的原因
- (4)正、负电子碰撞会湮灭并产生两个光子: $e^+e^- \rightarrow \gamma + \gamma$,试解释为什么正、负电子碰撞湮灭不可能只产生一个光子?

$$a_0 = a_n$$

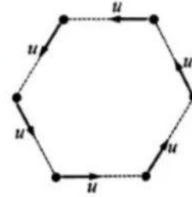
姓名: _____ 学号: _____ 学生所在院系: _____

题号	(选择题)	11	12	13	14	15	总分
得分							

一、选择题 (每题 3 分, 共 30 分)

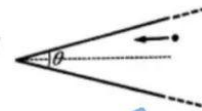
1. 初始时 6 只蚂蚁分别位于边长为 L 的正六边形的六个顶点处。在某一时刻, 它们开始以不变的相同速率 u 相互追逐, 速度方向始终指向前面的蚂蚁, 最后在正六边形的中心相遇。相遇之前每只蚂蚁行路长度等于 _____

- A. L ; B. $2L$; C. $3L$; D. $4L$



2. 两块非常长的光滑挡板围成一个顶角为 $\theta = 10^\circ$ 的三角形区域, 一小球以沿着角平分线方向的初速度入射, 设球与挡板间的碰撞是弹性的。则球与挡板总共会发生 _____ 次碰撞。

- A. 9; B. 18; C. 24; D. 36



3. 如果分别用 M 、 L 、 T 表示质量、长度和时间的量纲, 那么速度的量纲为 LT^{-1} , 而万有引力常数 G 的量纲为 _____

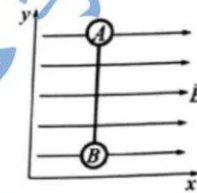
- A. MLT^{-2} ; B. ML^2T^{-1} ; C. $M^{-1}L^2T^{-1}$; D. $M^{-1}L^3T^{-2}$

4. 初始时刻, 由轻质刚性杆连接的两个质量相同的小球 A 与 B 静止于光滑水平地面上, 杆平行于 y 轴, 整个体系处在沿着 x 轴方向的均匀电场中。如果小球 A 和 B 带电量均为 $q (> 0)$, 那么 Δt 时间

之后体系的总动量和总动能分别为 \bar{P}_1 和 T_1 ; 而如果小球 A 带电量为 $2q$ 、小球 B 不带电, 那么 Δt 时间之后体系的总动量和总动能分

别为 \bar{P}_2 和 T_2 。下列说法正确的是 _____

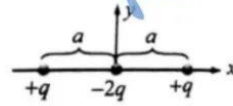
- A. $|\bar{P}_1| = |\bar{P}_2|, T_1 = T_2$; B. $|\bar{P}_1| \neq |\bar{P}_2|, T_1 = T_2$; C. $|\bar{P}_1| = |\bar{P}_2|, T_1 \neq T_2$; D. $|\bar{P}_1| \neq |\bar{P}_2|, T_1 \neq T_2$



5. 质量为 m 的物体通过轻质弹簧（弹性系数为 k ）悬挂在天花板上，该物体上下振动的周期为 T 。如果将该弹簧切成长度相同的 4 段，并利用其中一段将质量为 $2m$ 的物体悬挂在天花板上，则新物体上下振动的周期为_____

- A. $2T$ B. $T/2$ C. $\sqrt{2}T$ D. $T/\sqrt{2}$

6. x 轴上有三个点电荷，电量为 $-2q$ 的负电荷位于原点，两个电量均为 $+q$ 的正电荷分别位于 $-2q$ 的两侧距离为 a 处。对于正 x 轴上坐标为 $x (>> a)$ 的点 P ，电场的渐近行为是_____



- A. $E(x) \sim x^{-1}$ B. $E(x) \sim x^{-2}$ C. $E(x) \sim x^{-3}$ D. $E(x) \sim x^{-4}$

7. 两个电容器的标称值分别为 200pF（电容量）、1200V（耐压值）和 300pF、600V，则两电容器串联时的耐压值等于_____

- A. 600V B. 1200V C. 1500V D. 1800V

8. 导体球外有一个带正电的点电荷，下列说法错误的是_____

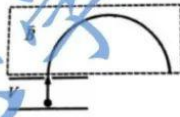
- A. 如果导体球带正电，则二者之间的作用力必为排斥力
 B. 如果导体球接地，则二者之间的作用力必为吸引力
 C. 如果导体球是电中性的，则二者之间的作用力必为吸引力
 D. 如果导体球接地，则其表面任何地方都不可能出现的净电荷

9. 设边长为 L 的均匀电正方体 1 在其顶点处激发的电场大小和电势分别为 E_1 和 ϕ_1 ，而边长为 $3L$ 的均匀带电立方体 2 在其顶点处激发的电场大小和电势则分别为 E_2 和 ϕ_2 。已知两立方体电荷密度相同，电势均以无穷远处作为参考点。下列结论正确的是_____

- A. $E_2 = E_1, \phi_2 = \phi_1$; B. $E_2 = 9E_1, \phi_2 = 3\phi_1$ C. $E_2 = 9E_1, \phi_2 = 9\phi_1$ D. $E_2 = 3E_1, \phi_2 = 9\phi_1$

10. 质量为 m 、带电量为 q 的粒子 1 和质量为 M 、带电量为 $2q$ 的

粒子 2 被同样的电压 V 从静止加速后，进入垂直于纸面向外的磁场区域，已知粒子 1 和 2 在该磁场中运动的轨道半径分别为 R 和

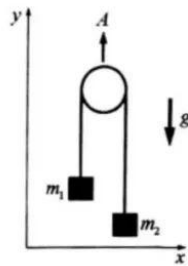


$2R$ ，则 M/m 等于_____

- A. 2; B. 4; C. 6; D. 8.

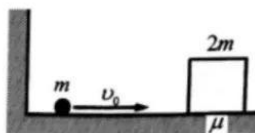
二、计算题

11. (本题 15 分) 质量分别为 m_1 和 m_2 的物体通过绕在光滑滑轮上的不可伸长的轻绳连接，滑轮质量可以忽略。已知滑轮以恒定速度 A 向上运动，两个物体只在竖直方向运动，重力加速



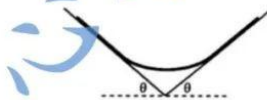
度为 g 。试确定两物体 y 轴方向的加速度 a_1 和 a_2 (向上为正)。

12. (本题 5 分) 如图所示, 质量为 m 、初速度为 v_0 的小球在固定的墙与质量为 $2m$ 的木块之间来回运动, 木块初始时静止。设碰撞瞬时完成且是完全弹性的, 并假设木块与墙之间的距离足够远, 以至于每次与小球碰撞之前木块已经静止。已知木块与地面的摩擦系数为 μ , 而小球与地面之间没有摩擦力, 重力加速度为 g 。

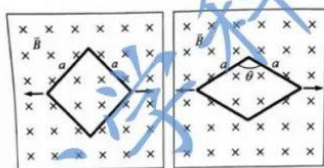


- (1) 小球与木块发生第 n 次碰撞之后的速度等于多大?
- (2) 木块最终能运动多远距离?
- (3) 木块运动的总时间 (即其速度不等于零的时间) 等于多少?

13. (本题 13 分) 如题所示, 一根质量分布均匀的绳子搁在两个倾角均为 θ 的平台上 (倾角 θ 可调控), 绳子与平台的摩擦系数为 1, 整个系统左右对称, 重力加速度为 g 。设 f 是绳子上与平台不接触的部分占绳子总质量的比例。当 θ 取何值时, f 取到最大值 f_{\max} ? f_{\max} 等于多大?



14. (本题 15 分) 边长为 a 的正方形导线圈置于垂直于纸面向里的均匀磁场 B 中, 在时间 Δt 内拉着正方形的两个顶点使其变形为菱形, 菱形的一个内角为 θ (如图所示)。已知线圈的总



电阻为 R ，试确定此段时间内线圈中平均的感应电流强度及方向，并确定此段时间内流经线圈某一个截面的电量。

15. (本题 12 分) 带电粒子在液氢气泡室中运动时将使其路径上的一些分子发生电离，电离处所形成的小气泡使粒子的轨迹清楚可见，而在此区域内的磁场则使路径发生弯曲。下面的气泡室照片显示的是 P 点处的一个几乎静止的电子吸收高能 γ 射线后沿着曲线 c 运动，同时

产生正、负电子对 (正电子 e^+ 是电子 e^- 的反粒子，二者质量相同、带电量相反)，该反应

可表示为 $\gamma + e^- \rightarrow e^- + e^+ + e^-$

已知均匀磁场与纸面垂直。

- (1) 曲线 a 、 b 中的哪一条表示正电子 e^+ 的轨迹?
- (2) 磁场的方向指向纸面内还是纸面外? 简述理由:
- (3) 试定性地解释曲线 a 、 b 是螺旋线而非圆周的原因;
- (4) 正、负电子碰撞会湮灭并产生两个光子: $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$ ，试解释为什么正、负电子碰撞湮灭不可能只产生一个光子?

